I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ІСЗЗІ

2019 р.

Перший курс

1. Обчислити визначник n-го порядку $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & x \\ a & a & a & \dots & x & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & x & a & \dots & a & a \\ x & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$.
2. Знайти центр та радіус кола, вписаного в трикутник, сторони якого лежать на прямих $2x+3y-5=0$, $3x-2y+7=0$ та $6x+4y-13=0$. Виконати малюнок.
3. Безпосередньо за визначенням знайти границю послідовності, заданої рекурентним співвідношенням: $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{11}{x_n+10}$, $n\in\aleph$.
4. Знайти похідну функції $y=\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)^{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}-\sqrt[7]{\dfrac{x^2(x-1)^3}{(x+1)^4\cos^6 5x}}$.
5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що скалярний добуток векторів $\vec{OX}$ та $\vec{OY}$ не перевищує одиницю, тобто $\vec{OX}\,\vec{OY}\le 1$, для будь-якої точки $X\in D$, $O(0;0)$.
6. З набору цілих чисел $A=\left(a_1, a_2, \dots, a_{2018}, a_{2019}\right)$ сформуємо новий набір за правилом $A'=\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}, \dfrac{a_2+a_3}{2}, \dots, \dfrac{a_{2018}+a_{2019}}{2}, \dfrac{a_{2019}+a_1}{2}\right)$. Визначити всі набори A, для яких всі елементи всіх наборів $A', A'', A''', \dots$ є цілими числами.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ІСЗЗІ

2019 р.

Старші курси

1. Обчислити визначник n-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.
2. Знайти рівняння бісекторної площини, тобто площини, яка ділить двогранний кут між площинами $2x - y + 3z + 9 = 0$ та $6x + 4y - 2z - 7 = 0$ навпіл, і яка розташована в тій частині простору, що й точка $M_0(3; -2; 1)$. Виконати схематичний малюнок.
3. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$, виконавши заміну $x = e^t$.
4. Розклавши в ряд Фур'є за синусами функцію $y = x(\pi - x)$, $x \in (0; \pi)$, знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.
5. Числову послідовність $\{x_n, n \in \aleph\}$ визначено у рекурентний спосіб:
$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2} \end{cases}.$$
Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$ та знайти його суму.
6. Знайти найменше значення виразу $\sum\limits_{1 \le i < j \le 2019} a_i a_j$, де $a_1, \dots, a_{2019} \in [-1; 1]$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/

Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua